

文章编号: 1000-7598-(2006)02-0179-05

数值流形方法对岩土工程开挖卸荷问题的模拟

朱爱军^{1,2}, 邓安福², 曾祥勇²

(1. 贵州大学 土木建筑工程学院, 贵阳 550003; 2. 重庆大学 土木工程学院, 重庆 400045)

摘 要: 基于数值流形方法数学覆盖与物理网格的相对独立性, 考虑任一时刻体系中真实存在的各平衡力项对体系平衡的作用, 提出用数值流形方法模拟岩土工程开挖卸荷的方法。相对于传统数值方法, 数值流形方法在模拟开挖时不用计算开挖面上的释放荷载, 不用为卸除的材料部分准备专门的单元, 简单的数学网格可以适应任意的开挖过程, 使其对开挖的模拟更加简便和有效, 同时高阶的流形方法对开挖问题具有较高的求解精度。

关 键 词: 数值流形方法; 数学覆盖; 岩土工程; 开挖卸荷

中图分类号: TU 452; TB 115

文献标识码: A

Numerical manifold method for simulation of excavation unloading in geotechnical engineering

ZHU Ai-jun^{1,2}, DENG An-fu², ZENG Xiang-yong²

(1. College of Civil Engineering and Architecture, Guizhou University, Guiyang 550003, China;

2. College of Civil Engineering, Chongqing University, Chongqing 400045, China)

Abstract: Based on the relative independence of mathematical cover and physical grid, and considering the action of truly existent various equilibrant force in system for system balance, a method of simulation for excavation unloading using numerical manifold method in geotechnical engineering is proposed. Compared with the traditional numerical method, the numerical manifold method need not calculate the released load on excavation face, need not prepare special element for unloaded material part; simple mathematic grid can meet the arbitrary course of excavation; so it is more convenient and effective; at the same time, high-order manifold method has better precision for excavation.

Key words: numerical manifold method; mathematical cover; geotechnical engineering; excavation

1 引 言

数值流形方法是石根华在研究 DDA 和有限元法的数学基础后提出的一种新的数值方法^[1, 2], 将连续与非连续问题进行统一求解是提出该方法的出发点。当流形方法的覆盖函数推广到高阶情况时, 其求解精度将有很大提高, 使流形方法高精度特性成为研究的一个重要方面^[3, 4]。

有限覆盖技术是数值流形方法的基础^[1], 任何形状的区域都可以使用由有限覆盖组成的覆盖系统对其完全覆盖。与有限元法对求解域进行离散的思想相比, 流形方法对求解域进行覆盖在数值方法的思想上是重要的转变。对流形元有限覆盖及其具体实施的研究是对流形元方法本身研究的重要方

面, 在这方面国内的研究已做了许多工作^[5~7]。

有限元对求解区域进行离散, 必须依赖于区域的边界或形状进行, 而数值流形方法基于覆盖技术, 数学覆盖和求解域相对独立, 只要求数学覆盖完全覆盖求解域, 而对它的形状与范围没有限制, 这为更方便地处理求解域的复杂构形提供了条件, 同时它能以同一套网格适应求解对象构形的不断变化, 如材料的卸除等。

岩土工程问题区别于其它工程问题的特点之一是其在不断地开挖或建筑(回填、支护等)^[8], 所以对开挖问题的模拟是岩土工程数值方法所研究的重要问题之一, 其中用有限元法对该问题已有较多的研究及应用^[9~11]。与有限元法相比, 数值流形方法是一种更具一般化意义的数值方法, 对问题的求解更

为自然。基于流形方法数学覆盖与物理网格的相对独立性和平衡方程中初应力矩阵项的使用,使流形方法对开挖卸荷问题进行模拟的过程更为清晰,计算更为简便和准确。

2 数值流形方法的基本原理

2.1 物理覆盖的覆盖函数

数值流形方法以物理覆盖为覆盖函数的构造区域,而以流形单元作为覆盖函数的插值区域,由此来形成求解域上的整体函数。

对平面问题,在物理覆盖 U_i 上可以使用 (x, y) 的级数作为覆盖函数:

$$\begin{Bmatrix} u_i(x, y) \\ v_i(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} f_{ij}(x, y) & 0 \\ 0 & f_{ij}(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{i,2j-1} \\ d_{i,2j} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

式中 $f_{ij}(x, y)$ 为完全多项式的基本级数; $d_{i,2j-1}$ 及 $d_{i,2j}$ 为物理覆盖的广义自由度,对应完全多项式的各系数。流形单元的覆盖函数可取 0 阶到高阶的完全多项式,对应 0, 1, 2 阶情况, m 分别为 1, 3, 6。

2.2 流形单元的总位移函数

各物理覆盖的覆盖函数在它们的交集——流形单元上,通过权函数对其进行加权平均构成流形单元的总位移函数。令物理覆盖 U_i 上的权函数为 $w_i(x, y)$ 。如果流形单元 e 由 q 个物理覆盖 $U_{e1}, U_{e2}, \dots, U_{eq}$ 的交集形成,则单元的总位移函数为

$$\begin{Bmatrix} u_e(x, y) \\ v_e(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^m w_{ei}(x, y) \begin{Bmatrix} u_{ei}(x, y) \\ v_{ei}(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^m \begin{bmatrix} w_{ei}(x, y) f_{eij}(x, y) & 0 \\ 0 & w_{ei}(x, y) f_{eij}(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{ei,2j-1} \\ d_{ei,2j} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

令变形矩阵为

$$[T_{ei}] = [T_{ei1} T_{ei2} \dots T_{eim}]$$

其中

$$[T_{eij}] = \begin{bmatrix} t_{e1,2j-1}(x, y) & t_{e1,2j}(x, y) \\ t_{e2,2j-1}(x, y) & t_{e2,2j}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{ei}(x, y) f_{eij}(x, y) & 0 \\ 0 & w_{ei}(x, y) f_{eij}(x, y) \end{bmatrix} \quad (3)$$

令

$$\{D_{ei}\} = [d_{ei,1} d_{ei,2} \dots d_{ei,2m-1} d_{ei,2m}]^T \quad (4)$$

式中 $\{D_{ei}\}$ 为物理覆盖自由度,是 $2m$ 阶向量。

由此,式(2)可表达为

$$\begin{Bmatrix} u_e(x, y) \\ v_e(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^q [T_{ei}] \{D_{ei}\}, \quad i=1, 2, \dots, q \quad (5)$$

2.3 流形单元的应变

对平面问题,由流形单元的总位移函数与应变的关系可以得到应变表达式:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [B_{e1} B_{e2} \dots B_{eq}] \begin{Bmatrix} D_{e1} \\ D_{e2} \\ \vdots \\ D_{eq} \end{Bmatrix} = [B_e] \{D_e\} \quad (6)$$

式中 $[B_{ei}]$ 为应变矩阵,

$$[B_{ei}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial t_{e1,1}}{\partial x} & \frac{\partial t_{e1,2}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial t_{e1,2m}}{\partial x} \\ \frac{\partial t_{e2,1}}{\partial y} & \frac{\partial t_{e2,2}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial t_{e2,2m}}{\partial y} \\ \frac{\partial t_{e1,1}}{\partial y} + \frac{\partial t_{e2,1}}{\partial x} & \frac{\partial t_{e1,2}}{\partial y} + \frac{\partial t_{e2,2}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial t_{e1,2m}}{\partial y} + \frac{\partial t_{e2,2m}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (7)$$

2.4 平衡方程

对于不同的问题,参与平衡方程的各势能源不同,总的来说主要有:①应变能势能;②初应力势能;③点荷载势能;④体荷载势能;⑤惯性力势能;⑥用于不连续变形分析的接触弹簧力势能和摩擦力势能等。根据最小势能原理,各势能项对覆盖自由度 $\{D\}$ 求导得到各矩阵项形成体系的平衡方程:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix} \quad (8)$$

对应于各种阶数的覆盖函数, $[K_{ij}]$ 为相应阶数的子矩阵; $\{D_i\}$ 及 $\{F_i\}$ 为相应阶数的向量。

3 对开挖问题的计算原理

3.1 覆盖系统随开挖过程的变化

在流形方法中,开挖将改变材料的物理网格,而由于数学覆盖与物理网格的相对独立性,数学覆盖在开挖过程中并不发生改变,这与有限元法有很大的不同。

图 1 为一隧道开挖的流形元覆盖与有限元网格的比较图。假设隧道从上到下分 3 步开挖,图中数值流形方法采用了规则网格的数学覆盖(图 1(a)),它可以适应所有形式的开挖过程。有限元方法则需要为被卸除的材料部分准备专门的单元(图 1(b)),所以,当改变开挖的步骤和各步卸除材料的形状,

则需要采用不同的有限元网格。当卸除的材料部分形状奇特如有很小的尖角等, 对其进行有限元网格划分则是困难的, 流形方法则无这方面的困难。

但与有限元法一样, 在开挖的过程中流形方法也需对完全处于卸除材料部分的单元进行处理(空单元法或直接删除单元法^[12])。图2为隧道3步开挖过程中流形单元的变化情况。

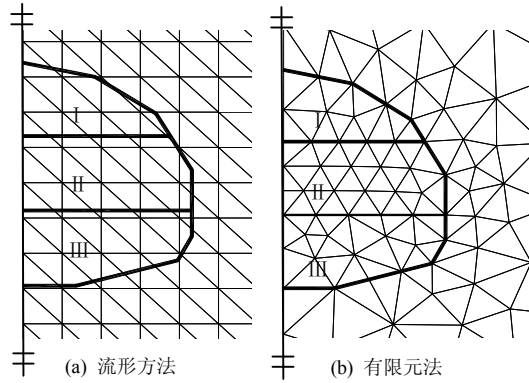


图1 开挖中的流形元覆盖和有限元网格
Fig.1 The manifold cover and FEM grid in excavation

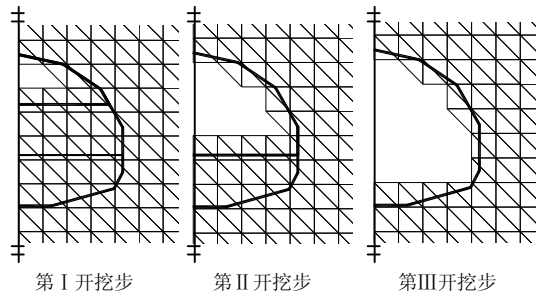


图2 流形单元随开挖步的变化
Fig.2 The change of manifold element with excavation

3.2 开挖过程中的平衡方程

在开挖的任一时刻, 体系的内力和外力平衡, 内力为单元的总应力, 外力为2.4节所述势能源的③, ④, ⑥项等。内、外力的平衡关系体现在流形方法中是各平衡力项产生的荷载矩阵之和为零。各平衡力项的荷载矩阵计算方法参见文[1]。限于篇幅, 本文考虑体系中只有一种外力, 即材料自重, 以此为说明开挖对体系平衡的破坏及体系新的平衡的形成。

在 t 开挖步, 体系中相互平衡的力为两个方面:

(1) 单元体积力, 即材料重力, $\{f\}=[f_x, f_y]^T$; (2) 单元总应力, $\{\sigma_e\}_t=[\sigma_{ex}, \sigma_{ey}, \tau_{exy}]_t^T$, 它可以是常量, 也可以是 (x, y) 的函数。在物理覆盖 U_{er} 上, 它们的平衡关系采用流形方法的格式时可表达为

$$\sum_{e=1}^{num_t} \iint_A [B_{er}]_t^T \begin{Bmatrix} \sigma_{ex} \\ \sigma_{ey} \\ \tau_{exy} \end{Bmatrix}_t dx dy = \sum_{e=1}^{num_t} \iint_A [T_{er}]_t^T dx dy \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \quad (9)$$

式中 A 为流形单元的积分区域; num_t 为 t 开挖步结束时体系中流形单元的数量。式(9)等式两边的意义是对所有含物理覆盖 U_{er} 的单元求与 U_{er} 对应的荷载矩阵。

第 $t+1$ 步开挖的结果是对第 t 步的材料构形的改变, 体现在式(9)中则是参与平衡方程的部分流形单元随开挖被去除, 而部分流形单元则由于开挖改变了其单元的积分区域 A , 这将导致整个体系失去平衡, 失去平衡后体系的将进行应力调整以达到新的平衡。从 t 开挖步到 $t+1$ 开挖步, 物理覆盖 U_{er} 的广义自由度增量为 $\{\Delta D_e\}_{t+1}$, 覆盖 U_{er} 相应的应变矩阵为 $\{B_{er}\}_{t+1}$, 则单元 e 的刚度矩阵为

$$[K_{ers}]_{t+1} = \iint_A [B_{er}]_{t+1}^T [E] [B_{es}]_{t+1} dx dy, \quad \left. \begin{matrix} r=1, 2, \dots, q; s=1, 2, \dots, q \end{matrix} \right\} \quad (10)$$

式中 $[E]$ 为单元的劲度矩阵。对所有单元求刚度矩阵并按相应的广义自由度进行集成, 得到体系的总刚度矩阵 $[K]_{t+1}$ 。

当 t 开挖步结束时, 单元 e 的总应力 $\{\sigma_e\}_t$ 作为 $t+1$ 步的初始单元应力, 由最小势能原理可以得到 $\{\sigma_e\}_t$ 在单元 e 上产生的荷载矩阵(即 $t+1$ 步的初应力矩阵):

$$\{F_{e,\sigma_e}\}_{t+1} = \iint_A [B_e]_{t+1}^T \begin{Bmatrix} \sigma_{ex} \\ \sigma_{ey} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_t dx dy \quad (11)$$

式中 $[B_e]_{t+1}=[B_{e1}B_{e2}\cdots B_{eq}]_{t+1}$; $\{F_{e,\sigma_e}\}_{t+1}$ 的下标 σ_e 为其为单元初应力产生的荷载矩阵。对所有单元求 $\{\sigma_e\}_t$ 产生的荷载矩阵并按相应的广义自由度集成, 可得到体系的荷载矩阵 $\{F_{\sigma_e}\}_{t+1}$ 。

在第 $t+1$ 开挖步的构形下, 单元 e 的体积力矩阵为

$$\{F_{e,f}\}_{t+1} = \begin{bmatrix} \iint_A [T_{e1}]_{t+1}^T dx dy \\ \iint_A [T_{e2}]_{t+1}^T dx dy \\ \vdots \\ \iint_A [T_{eq}]_{t+1}^T dx dy \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \end{Bmatrix} \quad (12)$$

式中 $\{F_{e,f}\}_{t+1}$ 的下标 f 表示其体积力为 $\{f\}$ 产生的荷载矩阵。同理, 对所有单元求 $\{f\}$ 产生的荷载矩阵并按相应的广义自由度集成可得体系的荷载矩阵 $\{F_f\}_{t+1}$ 。

当第 $t+1$ 开挖步结束时, 卸除开挖材料以后的体系的平衡关系可表达为

$$[K]_{t+1} \{\Delta D_e\}_{t+1} = \{F_f\}_{t+1} - \{F_{\sigma_e}\}_{t+1} \quad (13)$$

解式(13)方程, 可求得 t 到 $t+1$ 步的广义自由度增量:

$$\{\Delta D_e\}_{t+1} = [K]_{t+1}^{-1} (\{F_f\}_{t+1} - \{F_{\sigma_e}\}_{t+1}) \quad (14)$$

则从 t 到 $t+1$ 步的体系位移增量, 可将 $\{\Delta D_e\}_{t+1}$ 代入式(5)求得。

联立式(6)和式(14), 则 t 到 $t+1$ 步的单元应力增量为

$$\{\Delta \sigma_e\}_{t+1} = [E][B_e]_{t+1} \{\Delta D_e\}_{t+1} \quad (15)$$

$t+1$ 步结束时的单元总应力为

$$\{\sigma_e\}_{t+1} = \{\sigma_e\}_t + \{\Delta \sigma_e\}_{t+1} \quad (16)$$

由以上过程可见, 数值流形方法较全面地考虑了参与体系平衡的各种平衡力项, 任何开挖步产生的位移都是该开挖步构形中真实存在的各种力相互作用的结果, 这与有限元法需要求解开挖面上假想的挖方等效荷载的方法是不同的, 它更直观地接近体系的真实情况。

4 开挖步之间单元应力的传递

如果权函数为 1 阶, 当物理覆盖上采用 0 阶覆盖函数时, 所得到的位移解为坐标的线性函数, 而应力与应变在单元中为常数; 当物理覆盖上采用高阶的覆盖函数时, 得到的位移、应变及应力解都为局部区域的解析函数。对于常数应力单元与解析应力单元的情况, 各开挖步之间的应力传递是不同的。

4.1 开挖步之间常数应力的传递

使用 0 阶覆盖函数时, $t+1$ 步的初应力 $\{\sigma_e\}_t$ 的荷载矩阵为式(11), 且应变矩阵 $[B_e]_{t+1}$ 与应力 $\{\sigma_e\}_t$ 都为常数, 对式(11)积分, 则有:

$$\{F_{e,\sigma_e}\}_{t+1} = S[B_e]_{t+1}^T \begin{Bmatrix} \sigma_{ex} \\ \sigma_{ey} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_t \quad (17)$$

式中 S 为单元 e 的积分区域的面积。

通过式(16)求得 $t+1$ 步的单元总应力 $\{\sigma_e\}_{t+1}$, 将其作为 $t+2$ 步的初应力, 向下传递, 直到求解结束。当采用 0 阶覆盖函数时, 流形方法对大变形、非连续变形及弹塑性问题有成熟的分析方法, 使用流形方法模拟开挖时可以考虑以上问题的存在。

4.2 开挖步之间解析应力的传递

高阶流形方法是局部解析的数值方法。当采用高阶的覆盖函数时, 单元应力为坐标 (x, y) 的函数。如果第 t 开挖步已求解完成, 则 $\{D_e\}_t$ 为已知, 令第 1 开挖步以前的所有广义自由度为 0, 则 $\{D_e\}_t$ 为 1~ t 开挖步求得的广义自由度之和, 则第 t 开挖步结束

时单元 e 的应力为

$$\{\sigma_e\}_t = [E][B_e]_t \{D_e\}_t \quad (18)$$

式中 $[B_e]_t$ 为 (x, y) 的函数, 与 $\{\sigma_e\}_t$ 有相同的阶次。对于第 $t+1$ 开挖步, 在初始应力 $\{\sigma_e\}_t$ 的荷载矩阵式(11)中代入式(18)得:

$$\{F_{e,\sigma_e}\}_{t+1} = \iint_A [B_e]_{t+1}^T [E][B_e]_t \{D_e\}_t dx dy \quad (19)$$

用式(19)计算所有单元的荷载矩阵并集成体系的荷载矩阵 $\{F_{\sigma_e}\}_{t+1}$, 通过式(14)求得 $t+1$ 步的广义自由度增量 $\{\Delta D_e\}_{t+1}$, 则

$$\{D_e\}_{t+1} = \{D_e\}_t + \{\Delta D_e\}_{t+1} \quad (20)$$

将 $\{\Delta D_e\}_{t+1}$ 代入式(5)计算体系 $t+1$ 步的位移增量, $\{D_e\}_{t+1}$ 代入式(18)计算 $t+1$ 步的单元总应力。可见, 各开挖步之间对解析应力的传递是通过继承广义自由度的方法来实现的, 它可以使各开挖步之间的应力得到精确的传递。但由于开挖将去除部分流形单元, 必须正确计算开挖步之间各广义自由度的对应关系, 才能保证其正确传递。同时, 由于广义自由度与应力的关系必须基于初始的材料构形才是正确的, 所以该方法可以很好地应用于小变形问题, 而不适用于大变形问题。另外, 高阶流形方法对弹塑性问题的求解, 还有许多方面处于进一步的研究之中。

5 算例

以图 3 所示的隧道开挖为例, 岩体力学参数为: 重度 $\gamma = 26 \text{ kN/m}^3$, 变形模量 $E = 3.6 \text{ GPa}$, 泊松比 $\mu = 0.2$ 。从上到下分 3 步开挖, 根据对称性取其一半进行计算。模型的下边界受双向固定约束, 左右边界受水平方向固定约束。按平面应变进行分析。计算中所有的物理覆盖上都采用 2 阶的覆盖函数。

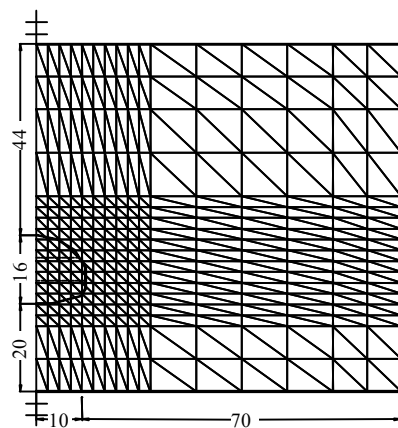


图 3 隧道的计算模型 (单位: m)

Fig.3 The calculation model of tunnel (unit: m)

图4给出了开挖前及3个开挖步的主应力分布。可以看到,在每个开挖步的隧道拱脚处主应力都有较大的集中,拱顶和拱底中部均有水平拉应力出现。

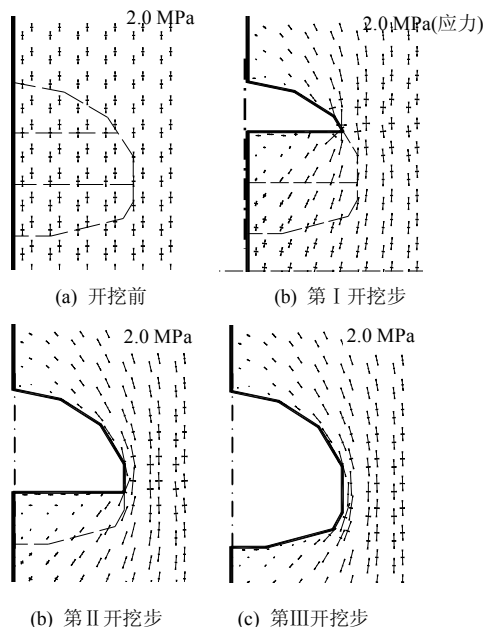


图4 各开挖步的主应力分布

Fig.4 The distribution of principal stress of different excavation step

6 结 论

(1) 数值流形方法不用为开挖的部分准备专门的单元,简单的数学覆盖可以适应任意的开挖过程,使程序计算的前处理工作比较简单。

(2) 有限元法求解开挖问题时,开挖等效荷载的计算是个复杂的问题,而数值流形方法对开挖问题的模拟,不用考虑被卸除材料部分对体系的作用,因而不需计算开挖的等效荷载,使模拟开挖的过程更为自然和简捷。

(3) 高阶的数值流形方法具有局部解析的特点,对问题的求解有较高的精度。采用继承广义自由度的方法可以实现各开挖步之间初应力的准确传递,有利于问题的求解精度。

(4) 本文只考虑了体系材料自重的作用,对于包括其它平衡力项的问题,只需在平衡方程中增加相应的矩阵项,则可按上述过程进行开挖问题的分析。

参 考 文 献

[1] 石根华. 数值流形方法与非连续变形分析[M]. 裴觉民译. 北京: 清华大学出版社, 1997.
[2] Shi G H. Modeling rock joints and blocks by manifold method[A]. *Proceedings of 32nd U.S. Symposium on*

Rock Mechanics[C]. New Mexico: Santa Fe, 1992. 639—648.

- [3] Guangqi Chen, Yuzo Ohnishi, Takahiro Ito. Development of highorder manifold method[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1998, 43(4): 685—712.
[4] Ming Lu. High-order manifold method with simplex integration[A]. *Fifth International Conference on Analysis of Discontinuous Deformation*[C]. Israel: Beer Sheva, 2002. 75—83.
[5] 张湘伟, 蔡永昌, 廖林灿. 数值流形方法物理覆盖系统的自动剖分[J]. 重庆大学学报, 2000, 23(1): 28—32.
ZHANG Xiang-wei, CAI Yong-chang, LIAO Lin-can. Auto mesh algorithm of the finite cover system in the numerical manifold method[J]. *Journal of Chongqing University*, 2000, 23(1): 28—32.
[6] 曹文贵, 速宝玉. 流形元覆盖系统自动形成方法之研究[J]. 岩土工程学报, 2001, 23(2): 187—190.
CAO Wen-gui, SU Bao-yu. A study on techniques of automatically forming of cover system of numerical manifold method[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2001, 23(2): 187—190.
[7] 朱爱军, 邓安福, 颜昌武, 等. 岩体材料物理网格对流形元覆盖系统形成的影响[J]. 岩土力学, 2004, 25(12): 1 933—1 936.
ZHU Ai-jun, DENG An-fu, YAN Chang-wu, et al. Effects of physical grid in rock mass for generation of cover system for numerical manifold method[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2004, 25(12): 1 933—1 936.
[8] 郑宏, 葛修润, 谷先荣, 等. 关于岩土工程有限元分析中的若干问题[J]. 岩土力学, 1995, 16(3): 7—11.
ZHENG Hong, GE Xiu-run, GU Xian-rong, et al. Some problems in FEA for geotechnical engineering[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 1995, 16(3): 7—11.
[9] 王勇, 殷宗泽. 有限元计算深开挖中挖方等效荷载的分析[J]. 河海大学学报, 1998, 26(5): 71—75.
WANG Yong, YIN Zhong-ze. Analysis of equivalent load caused by the removal of soil in finite element calculation of excavation[J]. *Journal of Hohai University*, 1998, 26(5): 71—75.
[10] 高俊合, 赵维炳, 李兴文. 深开挖有限元分析中释放荷载模拟[J]. 河海大学学报, 1999, 27(5): 47—53.
GAO Jun-he, ZHAO Wei-bing, LI Xing-wen. Simulation of unloading due to excavation in FE analysis[J]. *Journal of Hohai University*, 1999, 27(5): 47—53.
[11] 李世海, 张玉军. 深基坑开挖与支护过程的平面有限元模拟[J]. 岩石力学与工程学报, 1999, 18(3): 342—345.
LI Si-hai, ZHANG Yu-jun. Numerical simulations by 2D FEM in process of excavation and supporting of deep foundation ditch[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 1999, 18(3): 342—345.
[12] 朱爱军. 数值流形方法研究及其在岩土工程中的应用[博士学位论文 D]. 重庆: 重庆大学, 2005.